Дискретная математика, основной поток. **Решения задач экзамена 26.12.17**

Задачи оцениваются по тем же принципам, что и домашняя работа. За каждую задачу можно получить оценки $+$, $\pm$, $+/2$, $\mp$, $-$. *Эти оценки пересчитываются в, соответственно, 4, 3, 2, 1, 0 очков. Очки суммируются.*

1. Решите уравнение $238x+385y = 133$ в целых числах. Решения, в которых частное решение уравнения было угадано, оценивается не более чем в $\mp$.

Решение. *Ответ*: $x = -399 + 55t, y = 247 - 34t, t \in \mathbb{Z}$

Проверим, что уравнение разрешимо. Найдём $\text{НОД}(385, 238) = \text{НОД}(238, 147) = \text{НОД}(147, 91) = \text{НОД}(91, 56) = \text{НОД}(56, 35) = 7$. Разделим обе части уравнения на 7 и сведём задачу к решению уравнения

$$34x + 55y = 19,$$

которое решим итеративным расширенным алгоритмом Евклида.

x	y	$34x + 55y$
0	1	55
1	0	34
-1	1	21
2	-1	13
-3	2	8
5	-3	5
-8	5	3
13	-8	2
-21	13	1
-399	247	19

Общее решение уравнения $x = -399 + 55t, y = 247 - 34t, t \in \mathbb{Z}$.

2. Турниром называют ориентированный граф, в котором каждая пара вершин соединена ровно одним ребром. Какое максимальное число вершин с исходящей степенью ноль может содержать турнир с 2017 вершинами?

Решение. *Ответ:* 1.

Покажем, что существует турнир на 2017 вершинах, который содержит хотя бы одну вершину степени ноль. Возьмём произвольную вершину v и направим в неё рёбра из остальных вершин, рёбра между оставшимися парами вершин ориентируем произвольным образом. Поскольку между каждой парой вершин турнира существует ровно одно ребро, вершина v имеет исходящую степень ноль.

Покажем, что не может быть больше одной такой вершины. Пусть в турнире существует вершина v с исходящей степенью ноль. Тогда, для каждой вершины $u \neq v$, турнир содержит ребро (u, v) — между любыми двумя вершинами турнира есть ровно одно ребро, и оно ориентированно от u к v, поскольку вершина v имеет исходящую степень ноль. Значит, если бы в турнире была бы ещё хотя бы одна вершина t с исходящей степенью ноль, то турнир должен был бы содержать либо ребро (t, v), либо ребро (v, t) — но тогда одна из этих вершин не имела бы исходящую степень ноль.

3. Про множества A, B, C известно, что симметрическая разность любых двух из них содержит третье. Верно ли, что какие-то два из этих множеств не пересекаются?

Решение. *Ответ*: неверно.

Достаточно привести пример трех множеств, таких что симметрическая разность любых двух содержит третье и при этом любые два множества пересекаются. Рассмотрим такие множества: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$. Тогда получаем $A \triangle B = C$, $A \triangle C = B$, $B \triangle C = A$ и любые два из этих множеств пересекаются.

4. Существует ли множество A и отношение $R \subseteq A \times A$, такие что отношение $R \circ R$ транзитивно, а R не является транзитивным?

Решение. *Ответ*: Существует.

Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3\}$ и отношение $R = A \times A \setminus \{(1, 3)\}$. Тогда отношение R не транзитивно, поскольку $(1, 2) \in R$, $(2, 3) \in R$, а $(1, 3) \notin R$.

Отношение $R \circ R$ равно $A \times A$: поскольку R содержит диагональ Id_A, то $R \subseteq R \circ R$ ($(x, y) \in R, (x, x) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ R$), кроме того $R \circ R$ содержит пару $(1, 3)$, поскольку $(1, 2) \in R$, $(2, 3) \in R$. Отношение $A \times A$ является транзитивным, поскольку содержит всевозможные пары.

5. Докажите, что неравенство $k^k (n-k)^{(n-k)} \binom{n}{k} \leq n^n$ справедливо для любых $n > k \geq 1$. **Указание.** Можно привести комбинаторное доказательство, используя слова длины n над алфавитом из n букв.

Решение.

Всего слов длины n над алфавитом из n букв n^n — комбинаторный смысл правой части неравенства. Комбинаторный смысл левой части неравенства следующий. Пусть в алфавите k согласных букв и $n - k$ гласных. В левой части неравенства стоит число слов длины n, в которых k согласных букв: есть $\binom{n}{k}$ способов выбрать k позиций под гласные, k^k способов выбрать согласные буквы на эти места и $(n-k)^{n-k}$ способов выбрать гласные буквы — применив правило произведения, получаем левую часть неравенства. Число всех слов длины n в алфавите из n букв не меньше, чем слов длины n, в которых ровно k согласных — справедливость неравенства доказана.

Типовое неправильное решение

Есть алфавит из n букв. Выберем в качестве гласных k из них. Рассмотрим слова, в которых на первых k позициях стоят гласные, а на остальных согласные — их число и записано в левой части неравенства.

Это решение **неверно**, поскольку некоторые слова при выборе гласных указанным образом будут подсчитаны минимум дважды. Например, алфавит a,b,c,d, $n = 4$, $k = 2$ — минимум дважды будет подсчитано слово $aadd$, при выборе в качестве гласных $\{a, c\}$ и $\{a, b\}$.

Типовая ошибка. При доказательстве по индукции, индукция ведётся по двум параметрам (n и k) и переход осуществляется от (n, k) к $(n + 1, k + 1)$.

6. Вершины неориентированного графа G — числа $\{0, 1, \ldots, 326\}$. Между вершинами x и y есть ребро тогда и только тогда, когда $|x - y| \equiv 3 \mod 327$. Содержит ли некоторый связный подграф H графа G эйлеров цикл? При положительном ответе укажите максимальное количество вершин в таком подграфе.

Решение. *Ответ:* 1

Поскольку в графе нет вершин отличающихся более чем на 327, сравнение $|x - y| \equiv 3 \mod 327$ равносильно уравнению $|x - y| = 3$. Значит, ребро есть только между вершинами, разность которых три, и граф состоит из объединения трёх путей, каждый из которых содержит вершины с одинаковыми остатками по модулю 3.

Поскольку в графе нет простых циклов длины больше 2, а в каждом простом цикле длины 2 рёбра повторяются (такие циклы — проход по ребру и обратно), то подграф графа может содержать только эйлеров цикл длины ноль. А поскольку подграф связный, то в нём одна вершина.

При составлении задачи автор допустил оплошность. Чтобы получилась задуманная задача, нужно было условие $|x - y| \equiv \pm 3 \mod 327$. Приводим ниже решение задуманной задачи и критерии её оценивания. Студентам, решившим задуманную задачу, повезло, поскольку оно тяжелее получившейся — такие решения были проверены без уменьшения оценки.

Решение.

Исследуем компоненты связности графа G. По определению, между вершинами x и y есть ребро, либо когда $x \equiv y + 3 \mod 327$, либо когда $x \equiv y - 3 \mod 327$. Каждая вершина имеет степень 2, поскольку среди вершин графа встречаются все остатки по модулю 327, причём каждый остаток встречается ровно один раз. Таким образом, вершины a и b лежат в одной компоненте связности, если и только если разрешимо сравнение $a + 3k \equiv b \mod 327$ или, что то же самое, разрешимо в целых числах уравнение $3k + 327n = b - a$. Последнее разрешимо тогда и только тогда, когда разность $b - a$ делится на НОД$(327, 3) = 3$, то есть $a \equiv b \mod 3$.

Итак, граф G имеет три компоненты связности H_0, H_1, H_2, состоящие из чисел имеющих одинаковые остатки по модулю 3. Все они имеют одинаковый размер $327/3 = 109$. Докажем, что подграф G_i, состоящий из всех вершин и всех рёбер компоненты связности H_i, содержит Эйлеров цикл. Подграф G_i связен по построению и, как мы показали выше, каждая его вершина имеет степень два — значит подграф G_i содержит Эйлеров цикл по критерию. Поскольку G_i — максимальный по количеству вершин связный подграф графа G, то он и является искомым подграфом H.

7. Найдите количество (необязательно всюду определённых) функций f из $\{1, \ldots, 7\}$ в $\{1, \ldots, 7\}$, таких что $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ и $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ (на $f(7)$ и $f^{-1}(7)$ дополнительных ограничений нет). Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.

Решение. *Ответ:* 810.

Условие $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ выполняется тогда и только тогда, когда f устанавливает биекцию между множествами $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5, 6\}$. Действительно, f инъекция, поскольку если какие-то два элементы были склеены в один, то $|f(\{1, 2, 3\})| < 3$, f — сюръекция по определению. Количество таких биекций есть 3!.

Условие $f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{4,5,6\}$ выполняется тогда и только тогда, когда, образ каждого из чисел множества $\{4,5,6\}$ не пуст и лежит в множестве $\{1,2,3\}$ — количество таких отображений для множества $\{4,5,6\}$ есть 3^3 (для каждого из чисел $1,2,3$ нужно выбрать независимо ровно одно из $4,5,6$).

Из условия $f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{4,5,6\}$ следует, что $f(7) \notin \{1,2,3\}$, а первое условие не накладывает ограничений на $f(7)$, значит либо $f(7) \in \{4,5,6,7\}$, либо значение $f(7)$ не определено — всего 5 вариантов. По правилу произведения получаем, что требуемое число функций есть $3! \times 3^3 \times 5 = 6 \times 27 \times 5 = 810$.

8. Дан простой неориентированный двудольный граф G, вершины которого поделены на доли A и B. Паросочетанием называется любое подмножество ребер в графе, никакие два ребра в котором не имеют общих концов. Паросочетание покрывает вершину графа, если оно содержит ребро, смежное этой вершине. В G есть два паросочетания. Докажите, что есть третье, которое покрывает все вершины первого паросочетания из доли A и все вершины второго паросочетания из доли B.

Решение.

Рассмотрим подграф H графа G, состоящий из всех вершин G и всех ребер, входящих в хотя бы одно из двух паросочетаний. Каждая вершина смежна не более чем одному ребру в каждом из паросочетаний, так что степень каждой вершины в H не больше двух. Рассмотрим отдельно каждую компоненту связности H. Поскольку степени вершин в каждой компоненте связности не больше 2, то это либо путь, либо цикл.

Будем строить новое паросочетание. В него мы будем включать только ребра из H. Опишем нужное множество ребер в каждой компоненте связности отдельно.

Пусть компонента связности является циклом. Заметим, что в паросочетаниях из условия задачи нет смежных ребер, так что ребра двух паросочетаний в цикле чередуются. Таким образом, цикл имеет четную длину. Возьмем в новое паросочетание каждое второе ребро из цикла. Тогда все вершины этой компоненты связности будут покрыты новым паросочетанием.

Пусть компонента связности является путем, обозначим его длину через k (длина — число ребер в пути). Перенумеруем ребра пути числами от 1 до k по порядку, начиная с одного из концов. Если k нечетно, то возьмем в новое паросочетание ребра с номерами $1, 3, \ldots, k$. Тогда вновь мы покрыли новым паросочетанием все вершины компоненты связности.

Пусть k четно. Заметим, что вершины долей A и B в графе чередуются. При этом вершин в пути нечетно, так что оба конца лежат в одной доле. Пусть для определенности это доля A. Тогда возьмем в новое паросочетание все ребра из первого сочетания в этой компоненте. Тогда единственная непокрытая вершина в этой компоненте – это концевая вершина из A, смежная с ребром из второго паросочетания. Но ее и не требовалось покрыть.

Объединяя паросочетание со всех компонентах получаем требуемое паросочетание в графе G.