Дискретная математика, основной поток. **Решения задач экзамена 30.03.18**

1. Про множества A, B и C известно, что множество $(A\cup B)\setminus C$ континуально, $(A\cup C)\setminus B$ континуально, а $(B\cup C)\setminus A$ счетно. Может ли множество $B\cup C$ быть счетным? Если может, приведите пример, если не может — докажите это.

Решение. *Ответ*: Может.

В качестве примера можно взять попарно непересекающиеся множества A, B и C, такие что B и C счетны, а A — континуально. Например A — множество чётных натуральных чисел, B — нечётных натуральных чисел, $C = \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Тогда множества $(A\cup B)\setminus C = A\cup B$ и $(A\cup C)\setminus B = A\cup C$ континуальны (добавление к бесконечному множеству счетного не меняет мощности бесконечного множества). А множество $(B\cup C)\setminus A = B\cup C$ счетно (как объединение счетных множеств).

2. Неориентированный путь состоит из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_4$. Вершины пути равновероятно и случайно красятся в 4 цвета. Найдите вероятность того, что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

Решение. *Ответ*: 3/32.

Каждую из пяти вершин можно покрасить в один из четырех цветов, так что всего раскрасок 4^5. Подсчитаем число раскрасок, таких что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

Вершину v_0 можно покрасить в любой из 4 цветов. Для каждой поскраски вершины v_0 вершину v_1 можно покрасить в 3 цвета (цвет вершины v_0 использовать нельзя). Каждую следующую вершину можно покрасить в 2 цвета при всякой раскраске предыдущих вершин (нельзя использовать цвета двух предыдущих вершин и эти цвета различны). По правилу произведения число интересующих нас раскрасок равно $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Таким образом, искомая вероятность

$$\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{4^5} = \frac{3}{32}.$$

3. Функция $F(t)$ равна нулю при $t \le \lfloor n/3\rfloor$ и равна 1 при $t > \lfloor n/3\rfloor$. Определим булеву функцию

$$f(x_1,\ldots,x_n) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Докажите, что функция f вычислима схемой полиномиального размера.

Решение.

Используем последовательность сумматоров (схем, реализующих сумму) для вычисления суммы $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Всего используем n сумматоров, каждый размера $O(\log n)$ — для записи числа n (максимальное значение суммы) требуется $k = \lceil \log_2 n\rceil$ битов. Итак, каждый сумматор имеет k входов и выходов; на вход первому сумматору подаются биты при этом на вход первому сумматору подаются последовательности $00\ldots x_1$ и $00\ldots x_2$, а на вход i-му — результат вычисления предыдущего и биты $00\ldots x_{i+1}$. Итак, мы использовали n сумматоров размера $O(\log n)$ итого на текущем шаге построения в схеме $O(n\log n)$ элементов.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — двоичная запись числа $b = \lfloor n/3\rfloor + 1$. Заметим, что поскольку при каждом n, число b фиксировано, то вовсе не нужно вычислять b схемой. Используем схему, которая реализует сравнение чисел, заданных двоичной записью $y_1, \ldots, y_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ полиномиального размера (задача 2 недели 18). Схема возвращает отрицание результата сравнения: если схема сравнения выдала результат 1

$(y < b)$, то схема возвращает 0, иначе 1. Таким образом, описанная схема вычисляет F по определению и сама схема имеет полиномиальный размер.

4. Сколько существует упорядоченных пар (x, y) остатков по модулю 11, таких что $x^2 \equiv y^2 \pmod{11}$?

Решение. *Ответ*: 21.

Если $y = 0$, то x должен удовлетворять уравнению $x^2 \equiv 0 \pmod{11}$. То есть, x^2 должно делиться на 11, и в силу простоты числа 11 сам x тоже должен делиться на 11. Так что для $y = 0$ годится один остаток $x = 0$.

Зафиксируем теперь y произвольным ненулевым остатком. Уравнение можно преобразовать к виду $(x - y)(x + y) \equiv 0 \pmod{11}$. То есть, $(x - y)(x + y)$ делится на 11. В силу простоты числа 11 отсюда следует, что $(x - y)$ или $(x + y)$ делится на 11. То есть, $x \equiv y \pmod{11}$ или $x \equiv -y \pmod{11}$, причем в силу нечетности числа 11 верно $y \not\equiv -y \pmod{11}$. Таким образом, для всякого ненулевого остатка y годятся ровно два различных остатка $x \equiv y, x \equiv -y \pmod{11}$. Всего получаем $1 + 10 \cdot 2 = 21$ пар остатков, удовлетворяющих $x^2 \equiv y^2 \pmod{11}$.

5. Пусть X и Y — конечные множества. Даны две всюдуопределенные функции $f, g \colon X \to Y$. Известно, что f является инъекцией, а g — сюръекцией. Верно ли, что для всякого $A \subseteq X$ выполняется $|g^{-1}(f(A))| \geq |A|$? Если не верно, приведите пример f, g и A, для которых неравенство не верно. Если верно — докажите это.

Решение. *Ответ*: Верно.

Рассмотрим произвольное $A \subseteq X$. Поскольку f — инъекция, то для всех $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 \neq x_2$, выполняется $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, $|f(A)| = |A|$. Далее, поскольку g — сюръекция, то для всякого $y \in f(A)$ существует x, такой что $g(x) = y$. Поскольку g — функция, то различным $y \in f(A)$ соответствуют разные $x \in X$, такие что $g(x) = y$. Следовательно, $|g^{-1}(f(A))| \geq |f(A)|$. В итоге получаем $|g^{-1}(f(A))| \geq |f(A)| = |A|$, что и требовалось.

6. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима и для неё перечислимо множество точек $D \subseteq \mathbb{N}$, в которых она не определена ($D = \{x \mid f(x) = \uparrow\}$). Следует ли отсюда, что множество $f^{-1}(\mathbb{N})$ разрешимо?

Решение. *Ответ*: Следует.

Множество $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus D$ — область определения вычислимой функции f. Как известно из курса, область определения вычислимой функции перечислима (можно параллельно запускать программу, вычисляющую f на всех входах и выводить те входы, на которых программа вернула значение f). Таким образом, множество D перечислимо как и его дополнения, отсюда получаем, что D разрешимо по теореме Поста. Но тогда разрешимо и его дополнение $f^{-1}(\mathbb{N})$.

7. При изготовлении ожерелья используют 6 белых и 6 чёрных бусинок. Их надевают на нить в случайном порядке (все расстановки бусин на нити равновероятны), после чего концы нити завязывают и все бусины оказываются расположены по кругу. Найдите математическое ожидание числа чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

Решение. *Ответ*: $\frac{18}{11}$.

Обозначим случайную величину, равную числу черных бусин, обе соседние бусины которых белые, через X. Для всякого $i = 1, \ldots, 12$ рассмотрим дополнительную случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая бусина черная, а две соседние бусины белые,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь i-ая бусина – это бусина, которую надели на нить i-ой, а под соседними бусинами понимаются бусины, которые оказались соседними после завязывания нити. Тогда нетрудно видеть, что $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$: и левая, и правая часть равенства равна количеству чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

Вычислим матожидание X_i. Общее число способов надеть бусины на нить равно $\binom{12}{6}$ (нужно выбрать 6 позиций из 12 для черных бусин, остальные позиции занимают белые бусины). Для того, чтобы выполнялось $X_i = 1$, нужно, чтобы i-ая бусина была черной, а две соседние бусины были белые. Остальные бусины могут быть распределены произвольно и есть $\binom{9}{4}$ способов расставить оставшиеся бусины (нужно выбрать 4 из 9 оставшихся позиций для белых бусин).

Таким образом,

$$\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3}{22}.$$

Тогда по линейности матожидания

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{12} \mathrm{E}[X_i] = \frac{12 \cdot 3}{22} = \frac{18}{11}.$$

8. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на всех входах выдают ответ, причем на всех входах один и тот же? (В этой задаче требующиеся алгоритмы можно описывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

Решение. *Ответ*: Неразрешимо.

Приведём два решения.

Рассмотрим свойство вычислимых функций “быть константой”:

$$\mathcal{A} = \{f \colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \mid f \text{ вычислима и } \exists C \in \{0,1\}^* \ \forall x \in \{0,1\}^* \ f(x) = C\}.$$

Это нетривиальное свойство и по теореме Райса-Успенского множество номеров в главной нумерации функций, обладающих нетривиальных свойством, неразрешимо.

Из курса известно, что универсальная машина Тьюринга задаёт главную нумерацию, а посему множество описаний МТ вычисляющих функции из $\mathcal{A}$ неразрешимо.

Приведём теперь второе решение. Допустим, что это множество разрешимо, тогда сведём к нему проблему останова МТ на пустом входе. По каждой машине M построим машину M', которая на входе длины t запускает машину M на пустом входе на t шагов, используя универсальную МТ. Если M не остановилась за t шагов, M' возвращает 0, иначе 1. Заметим, что M' возвращает на пустом входе 0 по построению. Таким образом M' возвращает константу 0 на всех входах тогда и только тогда, когда M не останавливается на пустом входе. При этом, есть алгоритм, который по описанию M строит M'. Значит, описанное множество неразрешимо — иначе была бы разрешима и проблема останова.