Дискретная математика, основной поток. Решения задач экзамена 22.12.18

1. Найдите коэффициент при одночлене $wx^5y^3z^2$ в разложении $(7w - 2x + 3y - z)^{11}$ (ответ можно не упрощать).

Решение. *Ответ*: $-7 \times 2^5 \times 3^3 \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = -7 \times 2^5 \times 3^3 \times \dfrac{11!}{5!3!2!}$.

Возведение в степени коэффициентов при переменных даст множитель $-7 \times 2^5 \times 3^3$. Выбрав последовательно из 11 скобок $(7w-2x+3y-z) \times (7w-2x+3y-z) \times \ldots \times (7w-2x+3y-z)$ 5 скобок для w, 3 скобки для y и 2 скобки для z получим произведение биномиальных коэффициентов и окончательный ответ.

2. Пусть всюду определенная функция $f\colon X \to Y$ является сюрьекцией и $A, B \subseteq X$. Верно ли, что $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$?

Решение. *Ответ*: Нет.

Предъявим пример, для которого равенство неверно.

Пусть $X = \{0, 1\}$, $Y = \{0\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$, $f(0) = f(1) = 0$. Тогда $A \setminus B = \{0\}$ и $f(A \setminus B) = \{0\}$. С другой стороны $f(A) = f(B) = \{0\}$ и $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$.

3. Про непустые попарно несовпадающие множества A, B и C известно, что $C \setminus A \subseteq B$ и $C \setminus B \subseteq A$. Возможно ли, что $B = A \cap C$?

Решение. *Ответ*:Нет.

Допустим, что равенство возможно. Тогда $C \setminus A \subseteq B = A \cap C$ или, что то же самое $C \cap \overline{A} \subseteq A \cap C$. Такое включение возможно, только если пересечение $C \cap \overline{A}$ пусто (иначе у A и его дополнения есть общие элементы). Отсюда получается, что C — подмножество A, но тогда $A \cap C = C$ и B совпадает с C.

4. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется линейной, если её можно задать формулой

$$a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus (a_2 \wedge x_2) \oplus \ldots \oplus (a_n \wedge x_n),$$

в которой $a_i \in \{0, 1\}$ — коэффициенты линейной функции. Выразите с помощью коэффициентов линейной функции **а)** число её фиктивных переменных; **б)** число единиц в её векторе значений.

Решение. *Ответ*: **а)** число нулевых коэффициентов среди $a_1, \ldots, a_n$ **б)** Если есть хотя бы одна единица среди $a_1, \ldots, a_n$, то 2^{n-1}, если нет то 2^n при $a_0 = 1$ и 0 при $a_0 = 0$.

Переменная x_i фиктивна тогда и только тогда, когда $a_i = 0$. Действительно, при $a_i = 0$ получаем $(a_i \wedge x_i) = 0$ при любом значении x_i, а при $a_i = 1$ изменение значения x_i приводит к изменению значения функции.

Из последнего утверждения следует, что если у линейной функции есть хотя бы одна существенная переменная, то у неё поровну наборов значений переменных, на которых она принимает значения 1 и 0. Действительно, пусть первая переменная существенна, тогда для любого набора $1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и получим. что $f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Если все переменные фиктивны, то функция — константа, равная a_0.

5. Обозначим через $P(n, k)$ число способов распределить n студентов по k группам (каждый студент входит ровно в одну группу) без учёта номеров групп. То есть, два распределения, в которых группы отличаются только номерами, считаются одинаковыми. Докажите, что выполняется следующая

рекуррентная формула:
$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + kP(n-1,k).$$

Решение.

Распределения n студентов по k группам можно разделить на два случая. В первом случае, n-ый студент — единственный студент в своей группе, а во втором у него есть одногруппники. Каждое разбиения первого вида получается из некоторого разбиения $(n-1)$-го студента на $k-1$ группу, путём добавления группы из n-го студента, поэтому таких разбиений $P(n-1,k-1)$. Каждое разбиение второго вида получаются добавлением к одной из групп разбиения $n-1$-го студента на k групп n-го студента. Всего есть k способов выбрать группу для n-го студента, отсюда по правилу произведения получаем, что число вторых способов $kP(n-1,k)$. Среди первых и вторых случаев нет общих разбиений, поэтому по правилу суммы получаем $P(n,k) = P(n-1,k-1) + kP(n-1,k)$.

6. Пусть R — бинарное отношение на конечном множестве A. Определим бесконечную последовательность бинарных отношений:

$$R_0 = R,\ \ R_1 = R_0 \circ R = R \circ R,\ \ R_2 = R_1 \circ R,\ \ R_3 = R_2 \circ R,\ \dots\ , R_n = R_{n-1} \circ R,\ \dots$$

Верно ли, что (для произвольного R) начиная с некоторого n выполняется $R_n = R_{n+1}$?

Решение. **Ответ:** Нет.

Пусть $A = \{1,2,3\}$ и $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. Другими словами R — отношение «есть ребро» в ориентированном графе-треугольнике. Тогда R_n — отношение между u и v есть путь длины $n+1$. Действительно, прямое вычисление показывает, что $R_1 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$, $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = Id$, отсюда $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\} = R_0 = R$ и последовательность повторяется. При этом никакие соседние R_n и R_{n+1} не совпадают.

7. Докажите, что если $m \geq 2$ — минимальная степень вершины простого неориентированного графа G, то граф G содержит простой цикл (то есть цикл, в котором вершины не повторяются) длины не меньше $m+1$.

Решение.

Возьмем произвольную вершину v_1 графа G и будем строить из нее простой путь по следующему правилу. На каждом шаге из последней вершины v_i мы переходим в произвольного ее соседа, который еще не лежит в пути. Если это сделать невозможно, процесс заканчивается.

Пусть по итогу этого процесса построен путь $v_1, v_2, \dots, v_k$. Вершина v_k имеет не меньше m соседей, и поскольку процесс остановился, все они лежат в пути. Пусть v_i — сосед вершины v_k с самым маленьким номером. Тогда вершины $v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$ образуют простой цикл. Причем его длина не меньше $m+1$, поскольку он содержит вершину v_k и всех ее соседей.

Замечание. Типичное неверное решение. Доказательство по индукции: уберём одну вершину степени, получим, что минимальная степень не меньше $m-1$, возьмём цикл длины не меньше m, вернём вершину и встроим её в цикл, увеличив её длину.

Ошибка в том, что цикл может состоять только из вершин, не смежных с удалённой.

Другое типичное неверное решение утверждает, что в графе есть клика на m вершинах. Это неверно.

8. В ориентированном графе $G = (V,E)$ без петель на 16 вершинах каждая пара вершин соединена ровно одним ребром (направленным в ту или другую строну). Докажите, что найдётся такое множество $S \subseteq V$ из 8 вершин, что количество рёбер с началом в S и концом вне S больше, чем количество рёбер с концом в S и началом вне S.

Решение.

Предположим, что это не так, и для всякого множества S из 8 вершин количество рёбер с началом в S и концом вне S равно количеству рёбер с концом в S и началом вне S.

Для всякой вершины v графа G рассмотрим ее баланс $b(v) = d_+(v) - d_-(v)$, разность числа исходящих и входящих ребер. В курсе было доказано, что

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|.$$

Следовательно,

$$\sum_{v \in V} b(v) = 0.$$

Рассмотрим произвольное подмножество S из 8 вершин. Заметим, что

$$\sum_{v \in S} b(v) = \sum_{v \in S} d_+(v) - \sum_{v \in S} d_-(v) = |\{(a,b) \in E \mid a \in S, b \in V \setminus S\}| - |\{(a,b) \in E \mid a \in V \setminus S, b \in S\}| = 0,$$

где второе равенство верно, поскольку каждое ребро из первого множества правой части посчитано в левой части со знаком плюс, каждое ребро из второго множества правой части посчитано в левой части со знаком минус, а кроме этого в левой части посчитаны только ребра, оба конца которых лежат в S, и такие ребра посчитаны один раз со знаком плюс, а второй раз со знаком минус. Последнее равенство в цепочке следует из нашего предположения, сделанного в начале решения.

Из этого вытекает, что для любых двух вершин u и w их балансы $b(u)$ и $b(w)$ равны. Действительно, пусть множество S' содержит 7 вершин и не содержит вершины u и w. Тогда по доказанному

$$b(u) + \sum_{v \in S'} b(v) = 0 = b(w) + \sum_{v \in S'} b(v)$$

и $b(u) = b(w)$.

Как мы доказали, сумма балансов всех вершин графа равна нулю. Раз балансы всех вершин равны между собой, то они все равны нулю. Но с каждой вершиной смежно 15 ребер, следовательно баланс каждой вершины должен быть нечетен. Противоречие.