

Неделя 0. Индукция

1. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

б) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$;

2. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2019 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1. заменять первую цифру (ноль на единицу и наоборот);
2. заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

4. а) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

5. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

6. Докажите, что любое целое положительное число $k \geq 48$ представимо в виде $k = 7n + 9m$, где $n \geq 0, m \geq 0$.

Указание: Докажите, что для любых целых положительных взаимнопростых чисел a и b , $a < b$, выполняется следующее утверждение. Если начиная с некоторого числа c каждое из чисел $c, c + 1, \dots, c + a - 1$ представимо в виде $an + bm$, где $n, m \geq 0$, то и любое число $d > c$ представимо в виде $d = an + bm$, где $n, m \geq 0$.

7. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

8*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10 , некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

Домашнее задание 0.

1. Докажите равенство

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — также целое при любом целом положительном n .

3. Докажите неравенство для всех $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > 13/24$$

4. Докажите, что для каждого $n \geq 1$ существует число из n цифр, делящееся на 2^n и содержащее в десятичной записи только 3 и 4.

5. В зачёте участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачёт, каждый участник зачёта вошёл лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачёта в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

6. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

7. Целые положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n таковы, что $a_k \leq k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S .

8. За час до открытия избирательного участка перед ним собралась очередь из 60 человек. Каждую минуту каждый мужчина, за которым стоит женщина, пропускает ее вперед. Докажите, что к открытию все женщины окажутся впереди всех мужчин.