

## Графы I. Поиск в глубину

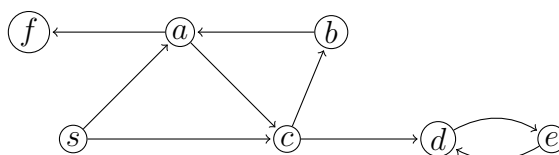


Рис. 1: Граф  $H$ .

1. 1. Опишите компоненты сильной связности графа  $H$ .
  2. проведите поиск в глубину начиная с вершины **а)** с вершины  $a$ ; **б)** с вершины  $b$ ; **в)** с вершины  $e$ .
  3. Используя время открытия и закрытия, найденные поиском в глубину, найдите алгоритмически компоненты сильной связности. Постройте конденсат  $H'$  графа  $H$ .
  4. Проведите топологическую сортировку графа  $H'$ .
2. В графе  $G$  был проведён поиск в глубину. Время открытия и закрытия вершин сохранено в массивах  $d$  и  $f$ . Постройте алгоритм, который используя только данные из массивов  $d$  и  $f$  проверяет, является ли ребро  $e$  графа  $G$ 
    - а) обратным ребром; **б)** ребром дерева.
  3. Постройте алгоритм, который проверяет, является ли граф двудольным.
  4. Постройте алгоритм, который находит кратчайшие расстояния от вершины  $u$  до всех достижимых из нее вершин взвешенного ориентированного ациклического графа (DAG) и оцените его время работы. На вход задачи подаётся описание DAG  $G$  и список ребер, каждое ребро задано тройкой целых чисел  $(i, j, w)$ , если в  $G$  есть ребро из вершины  $i$  в вершину  $j$  веса  $w$ . Длина пути из вершины  $u$  в вершину  $v$  во взвешенном графе — сумма весов на пути из  $u$  в  $v$ , если этот путь существует.
  5. Все степени вершин в неориентированном графе равны  $2k$ . Все его ребра покрашены в несколько цветов. Предложите  $O(|V| + |E|)$  алгоритм, который находит в этом графе эйлеров цикл, в котором цвета всех соседних ребер разные (либо выводит, что такого цикла нет).
  6. Какое максимальное количество ребер может быть в ориентированном ациклическом графе на  $n$  вершинах?
  7. В ориентированном графе  $G$  каждая компонента сильной связности содержит ровно одну вершину. Докажите, что  $G$  является DAG.
- Определение.** Ориентированный граф называют *турниром*, если между каждой парой его вершин есть ровно одно ребро. Также такие графы называют *полными* ориентированными графами.

8. Турнир с  $|V|$  вершинами задан в виде матрицы смежности ( $|V|^2$  памяти), предложите алгоритм, который находит общий сток за  $O(|V|)$  (или говорит, что его нет).

Общим стоком называют вершину, достижимую из любой вершины, такую, что из нее самой ребер не выходит.