

## Введение. Верхние и нижние оценки сложности алгоритмов

1. Дана программа

```
for (i = 1; i < n; i += 1) {
  for (j = 0; j < i; j += 1) {
    печать ("алгоритм")
  }
}
```

Пусть  $g(n)$  обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите  $\Theta$ -асимптотику  $g(n)$ .

2. Известно, что для семейства функций  $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  справедливо

$$\exists C \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, \forall n \geq N : f_i(n) \leq Cn.$$

1. Верно ли, что  $f_1 + f_2 = O(n)$ ?

2. Определим  $g(n) = f_1(n) + f_2(n) + \dots + f_n(n)$ . Верно ли, что  $g(n) = O(n)$ ? При положительном ответе приведите доказательство, при отрицательном — контрпример и лучшую верхнюю оценку.

3. Приведите верхние и нижние оценки на функции  $h_1(n) = n \times f_1(n)$ ,  $h_2(n) = n^2 \times (1 + f_2(n))$  и приведите примеры функций  $f_1$  и  $f_2$ , на которых эти оценки достигаются.

3. Докажите, что  $\log(n!) = \Theta(n \log n)$ .

4. Дана программа

```
for (bound = 1; bound < n; bound *= 2) {
  for (i = 0; i < bound; i += 1) {
    for (j = 0; j < n; j += 2)
      печать ("алгоритм")
    for (j = 1; j < n; j *= 2)
      печать ("алгоритм")
  }
}
```

Пусть  $g(n)$  обозначает число слов “алгоритм”, которые напечатает соответствующая программа. Найдите  $\Theta$ -асимптотику  $g(n)$ .

5. Докажите, не используя интегрального исчисления, что асимптотика  $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$ , если  $\alpha > 0$ .

6. Найдите  $\Theta$ -асимптотику функций:

а)  $f(n) = \binom{n}{k}$ ;   б)  $g(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ;   в)  $h(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .

7\*. Докажите, не используя интегрального исчисления, что асимптотика  $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$ , если  $\alpha > -1$ .