

## Домашнее задание

1. Игрок играет в казино в следующую игру. Делает ставку  $s$ , говорит крупье число от 1 до 6, после чего бросает три кубика. Если его число не выпало, то игрок ничего не получает, т. е. проигрывает 100 рублей; считаем, что в этом случае его выигрыш равен  $-100$ . Если же число выпало, то игрок получает свою ставку обратно и получает выигрыш — за каждое выпадание числа, казино платит игроку ставку, которую он поставил. Так, если игрок поставил сто рублей и его число выпало два раза, то игрок получит выигрыш 200 рублей, а если не выпало ни разу, то его выигрыш равен  $-100$  рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока, при ставке 100 рублей.
2. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.  
**Замечание.** Подробности о проведении лотереи неизвестны. Приведённой информации в условии достаточно для решения задачи.
3. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите  $\{a, b\}$  (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов  $ab$  в этом слове.
4. *Инверсией* в перестановке  $a_1 a_2 \dots a_n$  называется такая пара индексов  $i < j$ , что  $a_i > a_j$ . Пусть  $\pi$  — случайная перестановка (все перестановки равновозможны). Найдите математическое ожидание  $E[I(\pi)]$  количества инверсий  $I(\pi)$ .
5. Вероятностное пространство — перестановки  $(x_1, \dots, x_n)$  элементов от 1 до  $n$ . Найдите математическое ожидание чисел, не поменявших своё место. Формально, случайная величина — количество элементов множества  $\{i \mid x_i = i\}$ .
6. Пусть  $X$  — неотрицательная случайная величина. Известно, что  $E[2^X] = 5$ . Докажите, что

$$P[X \geq 6] < 1/10.$$

7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер графе  $n$  вершин и  $nd/2$  рёбер (то есть средняя степень вершины равна  $d$ ),  $d \geq 1$ . Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше  $n/2d$ .

*Подсказка.* В решении этой задачи поможет случайное множество  $V_p$ , в которое каждая вершина входит с вероятностью  $p$  независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра  $p$ .)