

Контрольная пройдет 31.03 с 9:15 по 12 в Б. Физической.

На контрольной запрещено пользоваться любыми электронными устройствами. Разрешено пользоваться книгой Кормена "Алгоритмы", а также разрешено взять один лист А4 с произвольными записями. Несколько книг "Алгоритмы" будут в публичном пользовании.

К следующему замечанию я попрошу отнестись серьезно. Любые нарушения указанного протокола повлекут нулевую оценку за тест. Также я настоятельно рекомендую выполнять работу самостоятельно. Согласно протоколу, если заимствование будет идентифицировано, то никакого поиска правых и виноватых производится не будет, и результаты всей группы будут обнулены. Пожалуйста, не подвожите своих товарищей, которые, возможно, и не подозревают о вашем орлином зрении и выдающихся способностях имитации.

### ИНФОРМАЦИЯ О СОДЕРЖАНИИ ТЕСТА

В тест включены разделы 1–4 программы, но основной упор сделан на теории NP-полноты. Во многих местах будет полезно вспомнить понятия и алгоритмы из ТРЯП, а в отдельных задачах и соображения, связанные с разрешимостью и перечислимостью. Ниже перечислены алгоритмы, которые полезно освежить в памяти. Они могут понадобиться для обоснования сводимостей, доказательства принадлежности конкретных языков классам и т.д.

**Следующие алгоритмы и профессиональные навыки входят в ликбез и могут быть использованы в тесте.**

1. Стандартные алгоритмы об автоматах и КСЯ из ТРЯП.

2. Работа с асимптотическими оценками. Использование "Основной теоремы" и/или дерева рекурсий.

2. Умение решать и/или оценивать линейные рекуррентные последовательности с постоянными коэффициентами.

3. Алгоритм Евклида.

4. Алгоритмы типа "разделяй-и-властвуй" для манипуляций с массивами (включая порядковые статистики).

5. Простейшие алгоритмы манипуляции и проверки свойств графов.

**Понятия и сведения из теории NP-полноты, которые полезно освежить в памяти.**

Определение классов  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $co - \mathcal{NP}$ . Полиномиальная сводимость. Свойства полиномиальной сводимости. Понятие полиномиально полного и полиномиально трудного языка для класса языков. Примеры полиномиально полных языков в классах  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $co - \mathcal{NP}$ . Знание конкретных сводимостей.

### Содержание теста

Всего будет 5 основных задач (по 3 балла каждая) и 6 вспомогательных задач (по 1.5 балла каждая). Время написания теста 2–2½ часа.

### Распределение задач теста 31 марта по разделам

Всего будет 5 основных задач (по 3 балла каждая) и 6 вспомогательных задач (по 1.5 балла каждая).

1. Оценки, лрп, основная теорема о рекуррентностях.
2. Манипуляции с массивами.
3. Теория NP-полноты, формальные языки.
4. Теория NP-полноты, графы.
5. Полиномиальная сводимость.
- 6.1. Асимптотические оценки.
- 6.2. Асимптотические оценки.
- 6.3. Теория NP-полноты.
- 6.4. Класс  $co - \mathcal{NP}$ .
- 6.5. Соотношения между сложностными классами  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $co - \mathcal{NP}$ .
- 6.6. Свойства классов  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $co - \mathcal{NP}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

#### Основная

1. Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. *Построение и Анализ Вычислительных Алгоритмов*. М.: Мир, 1979.
1. Гери М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. М.: Мир, 1982.
3. [Кормен 1] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. *Алгоритмы: Построение и Анализ*. М.: МЦНМО, 2002.
4. [Кормен 2] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. *Алгоритмы: Построение и Анализ*. (2-е изд.) М.: Вильямс, 2005.

#### Дополнительная

1. Верещагин Н., Шень А. *Вычислимы Функции*. М.: МЦНМО, 1999. (Электронный вариант: [www.mcsme.ru/free-books](http://www.mcsme.ru/free-books))
2. Виноградов И. *Основы теории чисел*. М.-Л.: Гостехиздат, 1952
3. Вялый М., Журавлев Ю., Флеров Ю. *Дискретный анализ. Основы высшей алгебры*. М.: МЗ Пресс, 2007.
4. К-Ш-В Китаев А., Шень А., Вялый М. *Классические и квантовые вычисления*. М.: МЦНМО-ЧеРо, 1999.
5. Lovasz L. *Computational complexity*. [www.cs.elte.hu/lovasz/complexity.pdf](http://www.cs.elte.hu/lovasz/complexity.pdf)

#### Вариант для подготовки

**Он может сильно отличаться от теста.**

### Оценки

1. Найдите  $\Theta$ -асимптотики следующих рекуррентностей:

$$(i) T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^2}{\log n};$$

*Подсказка.* Можно ли в этой задаче применять "Основную теорему"? Что делать, если нельзя? Основной тезис: не пытайтесь вспомнить, что где написано, — попробуйте хоть как-то решить пример подручными средствами (пусть и с худшими оценками, но самостоятельно).

$$(ii) T(n) = T(\sqrt{n}) + \log^3 n.$$

$\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $co - \mathcal{NP}$ , полиномиальная сводимость

**Это почти очевидные задачи (нужно просто понять определения).**

2. Верно ли, что полиномиальная сводимость взаимно-однозначная?

3. Верно ли, что в классе  $co - \mathcal{NP}$  есть полиномиально полные языки?

4. Верно ли, что если язык  $A$  сводится к языку  $B$  и язык  $B$  — полный в классе  $co-NP$ , то и язык  $A$  полиномиально полный в классе  $co-NP$ ?

**Эти задачи немного сложнее.**

5. Верно ли, что язык 4-КНФ (т. е. выполнимость КНФ, каждый дизъюнкт которой содержит  $\leq 4$  переменных) полиномиально полный в  $NP$ ?

6. Задача N 21 из задания (явная сводимость языков ГП и ГЦ).

7. Пусть  $A$  — это язык из  $\mathcal{P}$ , не совпадающий с  $\emptyset$  или с  $\Sigma^*$ . Верно ли, что оба семейства языков  $\{B \mid B \leq_P A\}$  и  $\{B \mid A \leq_P B\}$  (" $\leq_P$ " означает полиномиальную сводимость) не более, чем счетные?

Тот же вопрос, если  $A \in NP$ . Тот же вопрос, если  $A \in co-NP$ .

8. Является ли полиномиально полным язык  $L$ , состоящий из кодировок всех графов, в которых есть простой цикл, имеющий не менее  $|V|/2$  вершин?

9. Приведите доказательство, что язык ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ принадлежит  $co-NP$  (нельзя ссылаться на алгоритмы, корректность которых вы не можете обосновать; можно пользоваться критерием Куратовского).