



ВАРИАНТ 1

1(i)	1(ii)	2	3	4	5	6(i)	6(ii)	6(iii)	6(iv)	6(v)	6(vi)	Σ

Фамилия, имя

Группа

1 (2 + 3 баллов). Дана рекурсивная программа

функция $f(n)$

if $n > 1$

 печать("алгоритм")

 печать("алгоритм")

 печать("алгоритм")

$f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

$f(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)$

endif

Пусть $g(n)$ обозначает число слов "алгоритм", которые напечатает программа.

(i) Найдите в виде функции от n Θ -асимптотику $g(n)$.

(ii) Считая n степенью двойки, вычислите $g(n)$ точно.

2 (3(0.5) баллов). Предложите алгоритм, использующий $const \cdot n$, $const < 1$ попарных сравнений, который находит произвольный элемент из массива N чисел, больший или равный $\frac{7N}{8}$ элементов массива.

Чем меньшую константу вы укажете, тем более высокий балл получите.

3 (4 балла). Да Нет Пусть $A_i, i = 1, 2, \dots$ — это стандартные описания ДКА с единственным финальным состоянием в однобуквенном алфавите. Рассмотрим язык $L_{\cap \text{ДКА}} = \{ \langle A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \rangle \mid \bigcap_{j=1}^k L(A_{i_j}) \neq \emptyset \}$.

Верно ли, что $L_{\cap \text{ДКА}}$ принадлежит классу \mathcal{NP} ?

4 (3 балла). Да Нет Рассмотрим куб $K_N = [0, \dots, N-1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ и определим граф G_N ближайшего соседства всех его целых точек. Формально вершины G_N — это целые точки куба: $V(G_N) = K_N \cap \mathbb{Z}^3 = \{(0, 0, 0), \dots, (N-1, N-1, N-1)\}$, а пара вершин $t = (t_1, t_2, t_3)$ и $s = (s_1, s_2, s_3)$ образует ребро, если и только если точки t и s отличаются ровно в одной компоненте и ровно на единицу: $\sum_{i=1}^3 |t_i - s_i| = 1$, т. е. ребра соединяют только ближайшие вершины.

Является ли \mathcal{NP} -полным язык, состоящий из описаний всех графов G_N , имеющих хроматическое число ≤ 3 (графы заданы своими матрицами смежности)?

5 (3 балла). Да Нет

Язык $L_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ состоит из двоичных кодировок пар целых чисел (x, y) , являющихся решением уравнения $288688431x + 832235899y = 9649$.

Язык $L_2 = \{G_1, G_2, \dots\}$ состоит из стандартных описаний всех КСГ $G_i = \langle N_i, \Sigma, P_i, S_1 \rangle$ (над общим алфавитом Σ), которые порождают пустой язык.

Верно ли, что L_1 полиномиально сводится к L_2 ?



6 (6 × 1.5 баллов).

(i) Найдите Θ -асимптотику рекуррентности

$$T(n) = 2014T\left(\frac{n}{2013}\right) + \log(n!).$$

(ii) Да Нет Пусть $\{f_1, f_2, \dots\}$ — бесконечное семейство неотрицательных функций натурального аргумента и таких, что $f_k(n) = O(n)$. Верно ли, что $\sum_i^n f_i(n) = O(n^2)$?

(iii) Да Нет Язык УДВОЕНИЕ состоит из всех выполнимых КНФ, которые имеют не менее двух выполняющих наборов.

Докажите или опровергните, что язык УДВОЕНИЕ NP -полный.

(iv) Да Нет Верно ли, что класс $co - \mathcal{NP}$ замкнут относительно пересечения?

(v) Да Нет Верно ли, что существует язык L , полный в классе \mathcal{P} относительно полиномиальной сводимости, и такой, что $L \in \mathcal{NP}$ и $L \notin co - \mathcal{NP}$?

В ответе вы можете использовать стандартные гипотезы $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ и $\mathcal{NP} \neq co\mathcal{NP}$, но **только если это необходимо**.

(vi) Приведите пример языка, который **доказуемо** не принадлежит классу $\mathcal{NP} \cup co - \mathcal{NP}$.