

# Задание 9

## Приведение Контекстно-Свободных грамматик

**Ключевые слова**<sup>1</sup>: язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, морфизм, метод математической индукции.

### 1 Приведённые КС-грамматики

Вообще говоря, не все нетерминалы из описания КС-грамматики могут встретиться в выводе некоторого слова. Такие нетерминалы могут возникнуть в ходе различных алгоритмических преобразований – ниже мы встретимся с такими преобразованиями. Для удобства, в частности для корректности работы многих алгоритмов, необходимо от таких бесполезных нетерминалов избавиться.

Выделяют два типа бесполезных нетерминалов. Нетерминал  $A$  называется *бесплодным*, если язык  $L(G_A) = \{w \mid A \Rightarrow^* w\}$  пуст. Нетерминал  $A$  называется *недостижимым*, если ни одна цепочка вида  $\alpha A \beta$  не выводится из  $S$ . Грамматика  $G$  называется *приведённой*, если она не содержит недостижимых и бесплодных нетерминалов.

Для того, чтобы удалить все бесплодные символы нужно действовать по следующему алгоритму:

- Множество  $V_0 = T$ .
- Множество  $V_{i+1}$  строим по  $V_i$  следующим образом. Положим в начале  $V_{i+1} = V_i$ . Если для правила  $A \rightarrow \alpha$  справедливо  $\alpha \in V_i^*$ , то добавим нетерминал  $A$  в множество  $V_{i+1}$ .
- Как только  $V_{i+1} = V_i$ , объявляем  $N = V_i \setminus T$ , удаляем из  $P$  все правила, которые содержат нетерминалы не из  $V_i$  и заканчиваем работу.

**Упражнение 1.** Доказать корректность данного алгоритма.

Чтобы удалить все недостижимые символы нужно действовать по следующему алгоритму:

---

<sup>1</sup>минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

- Множество  $V_0 = S$
- Множество  $V_{i+1}$  строим по  $V_i$  следующим образом. Положим в начале  $V_{i+1} = V_i$ . Если  $A \in V_i$  и  $A \rightarrow \alpha B \beta$ , то добавим нетерминал  $B$  в множество  $V_{i+1}$ .
- Как только  $V_{i+1} = V_i$ , объявляем  $N = V_i$ , удаляем из  $P$  все правила, которые содержат нетерминалы не из  $V_i$  и заканчиваем работу.

**Упражнение 2.** Доказать корректность данного алгоритма.

Для того чтобы по грамматике  $G$  построить приведённую грамматику  $G'$ , необходимо сначала удалить все бесплодные символы, а потом удалить все недостижимые символы. Действовать надо именно в таком порядке, потому что иначе после удаления бесплодных символов могут появиться новые недостижимые символы, а после удаления недостижимых, новые бесплодные появиться не могут

## 2 Задачи

**Задача 1.**  $L = \{x y \mid x, y \in \{a, b\}^*; x \neq y^R\}$ . Постройте детерминированный МП-автомат, распознающий язык  $L$ . Если не получается построить детерминированный, построьте хотя бы недетерминированный.

**Задача 2\*.** Пусть  $L$  – КС-язык. Докажите, что язык  $\text{Pref}(L) = \{u \mid \exists v \in \Sigma^* : uv \in L\}$ , язык префиксов всех слов языка  $L$ , является КС-языком.

**Задача 3.** Постройте по грамматике  $G$  приведённую грамматику. Все построения должны быть выполнены строго по алгоритму. Грамматика  $G$  задана правилами:

$$\begin{array}{ll}
 S \rightarrow A \mid B \mid C \mid E \mid AG & C \rightarrow BaAbC \mid aGD \mid \varepsilon \\
 A \rightarrow C \mid aABC \mid \varepsilon & F \rightarrow aBaaCbA \mid aGE \\
 B \rightarrow bABa \mid aCbDaGb \mid \varepsilon & E \rightarrow A
 \end{array}$$

**Задача 4.** Пусть  $G$  – грамматика в нормальной форме Хомского. Докажите, что любое слово длины  $n \geq 1$  выводимо ровно за  $2n - 1$  шаг.

**Задача 5.** Постройте по грамматике  $G$  грамматику в нормальной форме Хомского.

$$S \rightarrow ABC \mid SBAC$$

$$A \rightarrow S \mid B \mid aCB \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow ab \mid b \mid A$$

$$C \rightarrow A \mid B \mid aBbA$$