

Регулярные и контекстно-свободные языки

Во всех задачах языки заданы над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$.
Задачи с пометкой $^\circ$ планируется разобрать на семинаре.

1 $^\circ$. Постройте ДКА \mathcal{A} по РВ $a(a^*|ba)^*(b^*|a)$.

Пусть $w = w_1w_2\dots w_n, w_i \in \Sigma$, тогда $w^R = w_nw_{n-1}\dots w_1$.
Обозначим $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ – *обращение* языка L .

2 $^\circ$. Постройте НКА, распознающий язык $L^R(\mathcal{A})$.

3 $^\circ$. Построить по \mathcal{A} регулярную праволинейную грамматику.

4 $^\circ$. Построить НКА \mathcal{B} по ПГ $S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon; A \rightarrow a \mid aB; B \rightarrow b \mid bS \mid A$.

Обозначим D_n – язык правильных скобочных выражений с n типами скобок. Такие языки называют *языками Дика*.

Докажите нерегулярность следующих языков:

5 $^\circ$. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. 6 $^\circ$. $L_ = = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$. 7. D_1 .

8. $\text{PAL} = \{w \mid w = w^R\}$. 9. $\Sigma^* \setminus \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 10. $\Sigma^* \setminus \text{PAL}$.

Построить для следующих языков КС-грамматику

11 $^\circ$. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. 12. $\Sigma^* \setminus \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. 13 $^\circ$. PAL .

14 $^\circ$. D_1 . 15 $^\circ$. $L_ =$. 16. $\Sigma^* \setminus \text{PAL}$. 17 $^\circ$. $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k\}$.

Известно, что язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не является КС-языком.
Пусть $A, B \in \text{CFL}$, $R \in \text{REG}$. Верны ли следующие утверждения (для произвольных A, B, R):

18. $A \cup B \in \text{CFL}$. 19. $A \cap B \in \text{CFL}$. 20. $A \setminus B \in \text{CFL}$.

21. $A \cdot B \in \text{CFL}$. 22. $A^* \in \text{CFL}$. 23*. $A \cap R \in \text{CFL}$.

24. Докажите, что язык $\{b^p \mid p \text{ простое число}\}$ не является регулярным.

25. Докажите, что для языка $L = b^* \cup \{ab^p \mid p \text{ простое число}\} \cup aa^+b^*$ удовлетворяет лемме о накачке. $a^+ = aa^*$.

26*. Докажите, что язык из предыдущей задачи нерегулярен.

Построить для следующих языков КС-грамматики

27. Язык из слов нечётной длины, с символом a по центру.

28. $\{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$ 29*. $\{w \mid w \neq uu, \forall u \in \Sigma^*\}$.

30. $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee i \neq k \vee j \neq k\}$.