

Избранные решения задач по курсу «Формальные языки и автоматы»

ВМК МГУ 2017

Семинарские задачи

Задача 1. Построить РВ R для языка L всех слов с чётным числом букв a .

Решение. Искомое РВ R имеет вид $(b^*ab^*ab^*)^* | b^*$. Докажем оба включения $R \subseteq L$ и $L \subseteq R$. Включение $R \subseteq L$ очевидно – РВ b^* порождает слова с нулевым количеством a , РВ $b^*ab^*ab^*$ порождает слова ровно с двумя буквами a , а если слово w порождается итерацией,

$$(b^*ab^*ab^*)^n = b^*ab^*ab^* \cup (b^*ab^*ab^*)^2 \cup \dots \cup (b^*ab^*ab^*)^n \cup \dots,$$

то $w \in (b^*ab^*ab^*)^n$ для некоторого n , а значит содержит ровно $2n$ букв a .

Включение $L \subseteq R$ докажем индукцией по количеству n букв a в слове w . База: при $n = 0$ слово w либо пусто, либо состоит только из букв b , а значит принадлежит $b^* \subseteq R$. Переход: пусть для $n = 2k$ каждое слово с n буквами a принадлежит R , докажем, что тогда это справедливо и для $n = 2k + 2$. Пусть w содержит $2k + 2$ буквы a , тогда $w = xab^iab^j$, для некоторых $i, j \geq 0$. При этом слово x принадлежит R по предположению индукции, а значит $x \in (b^*ab^*ab^*)^*$ и $x \in (b^*ab^*ab^*)^{m_1}$ для некоторого m_1 , поскольку $x \notin b^*$. Слово ab^iab^j также принадлежит $(b^*ab^*ab^*)^*$, и соответственно $(b^*ab^*ab^*)^{m_2}$ для некоторого m_2 . Но тогда $xab^iab^j \in (b^*ab^*ab^*)^{m_1+m_2} \subseteq (b^*ab^*ab^*)^*$, а значит $w \in (b^*ab^*ab^*)^*$ и $w \in R$.