

# Предел и непрерывность функции

Данный материал предназначен для подготовки к семинару, а также для самопроверки изученного материала по теме «Предел и непрерывность функции» в рамках курса «Введение в математический анализ», изучаемого в МФТИ. К семинару следует выучить и понять определения из списка ниже, знать формулировки и изучить доказательства теорем по данному разделу, а также желательно проверить себя, прорешав контрольные вопросы. Задачи предлагаются для более детальной подготовки и изучения темы. Помните, чем лучше вы подготовитесь к семинару, тем более детально мы сможем изучить тему. На семинаре будет проведена либо устная, либо письменная проверка знания теоретического материала.

## Определения и базовые понятия

- Функция
- Ограниченная функция
- (Точные) Грани функции
- Предел функции по Гейне
- Предел функции по Коши
- Бесконечно малая функция
- $O$  и  $o$  –  $O$ -большое и  $o$ -малое
- Эквивалентные (асимптотически равные) функции
- Бесконечные пределы функции
- Замечательные пределы
- Ограниченная последовательность

- Частичный предел функции
- Монотонная функция
- Непрерывная функция
- Точки разрыва функции
- Разрывы первого и второго рода
- Односторонние пределы

## Контрольные вопросы

1. Приведите пример соответствия, не являющегося функцией.
2. Приведите пример функции, разрывной в точке  $x_0$  и две последовательности Гейне, сходящиеся к разным пределам.
3. Верно ли, что если  $f(x) = o(g(x))$ , то  $f(x) = O(g(x))$  (при  $x \rightarrow x_0$ )?
4. Верно ли, что если  $f(x) = O(g(x))$ , то  $f(x) = o(g(x))$  (при  $x \rightarrow x_0$ )?
5. Верно ли, что если функция имеет два односторонних предела в точке, то она непрерывна в этой точке?
6. Как асимптотически соотносятся функции  $x$  и  $x^2$ , при  $x \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow \infty$ ?
7. Приведите пример функции, всюду определённой на отрезке и не достигающей на отрезке своей точной верхней грани.
8. Может ли неограниченная функция не быть бесконечно большой?

## Задачи

1. Разрыв какого рода в нуле имеет функция  $\sin \frac{1}{x}$ ?
2. Доказать, что функция  $x^n$  имеет обратную функцию на  $[0, +\infty)$ .
3. Привести пример функции, непрерывной в одной точке и разрывной во всех остальных.
4. Доказать, что если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то в некоторой окрестности  $U_\delta(x_0)$  функция  $f(x)$  сохраняет знак.
5. Функция  $f$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , при этом  $\lim_{x \rightarrow \infty} f = 0$  и существует точка  $x_0$ , такая что  $f(x_0) > 0$ . Доказать, что функция  $f$  достигает на  $\mathbb{R}$  конечный положительный супремум в некоторой точке.